Universidad Politécnica de Madrid–Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales-3º
Matemáticas de Especialidad–Ingeniería Eléctrica

Sistemas de ecuaciones no lineales

José Luis de la Fuente O'Connor
jldelafuente@etsii.upm.es
joseluis.delafuente@upm.es

Índice

El problema

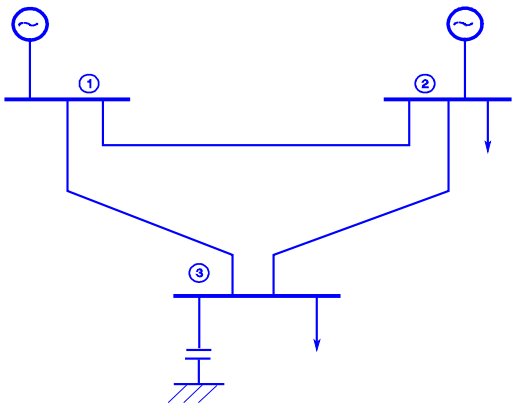
- En términos matemáticos,

$$\text{dada } \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \text{ hallar un } \bar{x} \text{ tal que } \boldsymbol{f}(\bar{x}) = \mathbf{0}.$$

  La función vectorial $\boldsymbol{f}$ se supone continua y derivable en algún conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, con derivadas parciales continuas en ese abierto.

- Los algoritmos que estudiamos son iterativos. En en cada etapa se resolverá un sistema de ecuaciones lineales resultante de una simplificación del problema original en el entorno de cada punto de un proceso.

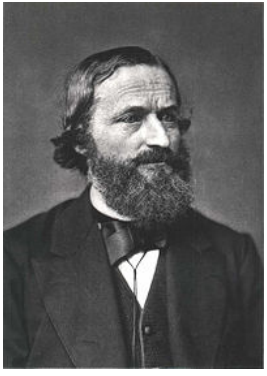
Estudios de cargas en sistemas de generación y transporte de energía eléctrica



- A partir de un patrón de demanda y generación de potencia en cada uno de los nudos que configuran un sistema, como el esquematizado en la figura:

> Los estudios de circulación de cargas determinan las tensiones en los nudos de la red, en módulo y argumento, los flujos de potencia activa y reactiva por todos los elementos del sistema, la intensidad por las líneas, las pérdidas en éstas, etc.

- Las leyes esenciales que gobiernan los flujos de electricidad en redes de este tipo las formuló Gustav Robert Kirchhoff, Alemania (Prusia, Königsberg) 1824-1887.



- Si se supone que los parámetros físicos de un sistema eléctrico permanecen constantes, existen cuatro variables asociadas a cada nudo i de ese sistema:
  - la tensión, en módulo, V_i, y argumento, θ_i;
  - la potencia activa inyectada, P_i, y
  - la potencia reactiva inyectada, Q_i.

- Las potencias inyectadas en el nudo i dependen de su tensión y de las de los a él unidos. Las expresiones que las relacionan, si no hay transformadores, son

$$P_i = |V_i|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(G_{p_{ij}} + G_{s_{ij}}\right) - |V_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |V_j| \left[G_{s_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{s_{ij}} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_j)\right]$$

$$Q_i = -|V_i|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(B_{p_{ij}} + B_{s_{ij}}\right) - |V_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |V_j| \left[G_{s_{ij}} \operatorname{sen}(\theta_i - \theta_j) - B_{s_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j)\right]$$

donde: V_i es el módulo de la tensión en el nudo i;
θ_i el argumento de la tensión en el nudo i;
$G_{s_{ij}}$ la conductancia serie (constante) de la línea que une el nudo i con el nudo j;
$G_{p_{ij}}$ la conductancia a tierra (constante) de la línea que une el nudo i con el j;
$B_{s_{ij}}$ la susceptancia serie (constante) de la línea que une el nudo i con el nudo j; y
$B_{p_{ij}}$ la susceptancia a tierra (constante) de la línea que une el nudo i con el j.

- Es norma que las tensiones se midan respecto a una referencia, que se elige en un nudo cualquiera que sea factible, nudo holgura, al que se asigna una tensión de 1 para el módulo y 0 para el argumento.

- Los tipos de nudos de un sistema y qué variables e incógnitas definirían cada uno de ellos se recogen en la siguiente tabla.

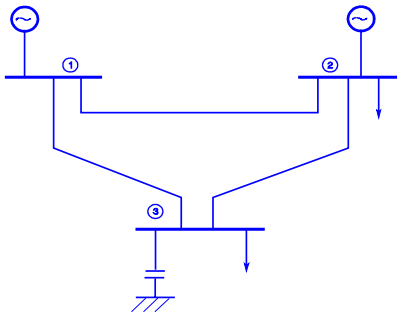
Tipo de nudo	Variables dadas	Incógnitas
Carga o PQ	P, Q	V, θ
Generación o PV	P, V	Q, θ
Holgura	V, θ	P, Q

  - Si, por ejemplo, de un nudo se conocen el módulo de la tensión y la potencia activa inyectada, para caracterizarlo totalmente habrá que calcular la potencia reactiva inyectada en él y el argumento de su tensión.

- Al suponer $V_1 = 1$ y $\theta_1 = 0$, para caracterizar un sistema eléctrico de n nudos se necesitarán conocer $2n - 2$ variables.

- Para caracterizar totalmente un sistema general habrá que resolver un sistema de $2n - 2$ ecuaciones no lineales de la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}) &= b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}) &= b_2 \\ &\vdots \\ f_{2n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}) &= b_{2n-2}. \end{aligned} \tag{1}$$



- Consideremos el pequeño sistema eléctrico de antes.

  Si se elige como nudo de holgura el 1, el 2 es PV y el 3 PQ. La función vectorial $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ que definiría el sistema no lineal de ecuaciones con el que determinar el estado de funcionamiento de ese sistema es la siguiente:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_2^2 \sum_{j=1,3} (G_{p_{2j}} + G_{s_{2j}}) - V_2 \sum_{j=1,3} V_j \left(G_{2j} \cos(\theta_2 - \theta_j) + B_{2j} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_j) \right) \\ V_3^2 \sum_{j=1,2} (G_{p_{3j}} + G_{s_{3j}}) - V_3 \sum_{j=1,2} V_j \left(G_{3j} \cos(\theta_3 - \theta_j) + B_{3j} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_j) \right) \\ -V_3^2 \sum_{j=1,2} (B_C + B_{p_{3j}} + B_{s_{3j}}) - V_3 \sum_{j=1,2} V_j \left(G_{3j} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_j) - B_{3j} \cos(\theta_3 - \theta_j) \right) \end{bmatrix}.$$

  La susceptancia del condensador conectado al nudo 3 es B_C.

- El $\boldsymbol{b}$ de (1), lo constituirán los valores de V_2, P_2, P_3 y Q_3, datos del problema.

Índice

Método de Newton-Raphson

- Estudiaremos funciones vectoriales[1] $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continuas, con derivadas parciales de primer orden continuas.

- En un punto $\boldsymbol{x}_k$ del proceso iterativo se aproxima la función mediante desarrollo en serie de Taylor truncándolo a partir de los términos de segundo orden,

$$M_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k),$$

donde $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)$ es la matriz Jacobiana del sistema en $\boldsymbol{x}_k$:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k) = \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{array}\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_k}.$$

[1] De momento con $n = m$.

- Si se resuelve el sistema lineal $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{0}$, su solución dará un avance a un nuevo punto del proceso iterativo.
  La relación de recurrencia del método es, en general:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

- En condiciones adecuadas, la convergencia del método es cuadrática.

- Algoritmo de **Newton-Raphson** para sistemas de ecuaciones no lineales:

I – Definir un $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$; hacer $k = 1$ y $\boldsymbol{x}_k \leftarrow \boldsymbol{x}_0$.

II – Resolver el sistema lineal $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$

III – Si $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k+1})\|_2 < Tol$, parar: el problema está resuelto

Si no, hacer $k = k + 1$, $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k+1}$ e ir al paso II

- **Ejemplo** Resolvamos mediante Newton-Raphson, partiendo del punto $[1,\ 1,\ 1]^T$, el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 &- \cos(x_2 x_3) &&- \frac{1}{2} &&= 0 \\ x_1^2 &- 81\left(x_2 + \frac{1}{10}\right)^2 &&+ \operatorname{sen}(x_3) + 1{,}06 &&= 0 \\ e^{-x_1 x_2} &+ 20x_3 &&+ \frac{10\pi - 3}{3} &&= 0. \end{aligned}$$

- Un código de **Matlab** para resolverlo:

```
function [x,dnor,iter]=Newt_Rap(funcion,x0,tol,maxiter)
% Newton-Raphson para cualquier sistema no lineal
 if nargin<4, maxiter=99999; end
 if nargin<3, tol=sqrt(eps); end
 dnor=1.0; iter=0; A=[]; Dnor=[];
 while dnor>tol && iter<maxiter
    iter=iter+1;
    [f,J]=funcion(x0);
    p=J\f';
    x=x0-p; [f]=funcion(x);
    dnor=norm(f,inf); A=[A;x']; x0=x; Dnor=[Dnor;dnor];
 end
 s=' %15.10e'; for i=1:size(x0)-1 s=[s ' %15.10e']; end
 for i=1:iter
    fprintf([s ' %15.10en'], A(i,:),Dnor(i));
 end
end
```

```
function [f J]=NRP_1(x)
 f(1) = 3*x(1)-cos(x(2)*x(3))-0.5;
 f(2) = x(1)^2-81*(x(2)+0.1)^2+sin(x(3))+1.06;
 f(3) = exp((-x(1)*x(2)))+20*x(3)+(10*pi-3)/3;
 if nargout<2, return, end
 J(1,1) = 3.0; J(1,2) = sin(x(2)*x(3))*x(3); J(1,3) = sin(x(2)*x(3))*x(2);
 J(2,1) = 2.0*x(1); J(2,2) = -162.0*(x(2)+0.1); J(2,3) = cos(x(3));
 J(3,1) = -exp((-x(1)*x(2)))*x(2); J(3,2) = -exp((-x(1)*x(2)))*x(1);
 J(3,3) = 20.0;
end
```

- Si se utiliza para resolver el problema:

```
>> [x,dnor,iter]=Newt_Rap(@NRP_1,[1;1;1])
9.1968721308e-001 4.6082245570e-001 -5.0338763550e-001 2.4087256490e+001
5.0100048532e-001 1.8743347767e-001 -5.2086923301e-001 5.8788006806e+000
5.0054293549e-001 6.1153453678e-002 -5.2200096420e-001 1.2916807111e+000
5.0010443627e-001 1.1617105749e-002 -5.2329514612e-001 1.9876169457e-001
5.0000551037e-001 6.0561572295e-004 -5.2358293632e-001 9.8214794394e-003
5.0000001666e-001 1.8263674473e-006 -5.2359872783e-001 2.9529468423e-005
5.0000000000e-001 1.6710515026e-011 -5.2359877560e-001 2.7018031860e-010
x =
    0.5000
    0.0000
   -0.5236
dnor =
  2.7018e-010
iter =
     7
```

Modificaciones del Método de Newton

Newton-Raphson por diferencias finitas

- El cálculo de la la matriz Jacobiana del sistema se lleva a cabo mediante su aproximación por diferencias finitas.

- Cada columna $\boldsymbol{a}_j$ de la matriz Jacobiana se aproxima mediante la expresión

$$\boldsymbol{a}_j = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + h_j \boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{h_j}.$$

  En condiciones favorables el parámetro h hacerse $\sqrt{\epsilon}$ para todos los x_j.

- Si el valor de los coeficientes del vector $\boldsymbol{x}$ difieren mucho unos de otros, hay que verificar los resultados de esta aproximación a menudo.

- **Ejemplo** Partiendo de $\boldsymbol{x} = [1, 1, 1]^T$, Newton-Raphson por diferencias finitas para resolver el ejemplo anterior:

```
function Newtrp_df_1(fx,x)
% Newton-Raphson por diferencias finitas para sistemas
 global h
 tol=sqrt(eps); dnor=1.0; h=tol;
 while dnor >tol
    [f J]=fx(x);
    p=J\f';
    x=x-p;
    dnor=norm(fx(x));
    fprintf('%15.10e %15.10e %15.10e %15.10en', x,dnor);
 end
end
```

```
function [f,J]=NRP_1_dif(x)
 global h
 f(1) = 3*x(1)-cos(x(2)*x(3))-0.5;
 f(2) = x(1)^2-81*(x(2)+0.1)^2+sin(x(3))+1.06;
 f(3) = exp((-x(1)*x(2)))+20*x(3)+(10*pi-3)/3;
 if nargout<2, return, end
 for i=1:3
    x(i)=x(i)+h;
    f1=NRP_1_dif(x);
    J(1:3,i)=(f1-f)/h;
    x(i)=x(i)-h;
 end
end
```

- El proceso de convergencia que resulta de la ejecución de este código, con

```
>> Newtrp_df_1(@NRP_1_dif,x)
```

es el que describe la tabla.

k	x_1	x_2	x_3	$\|f(x_k)\|_2$
1	9,1968721314e-1	4,6082245826e-01	-5,0338763389e-1	2,4087256721e+01
2	5,0100048524e-1	1,8743348339e-01	-5,2086923236e-1	5,8788009464e+00
3	5,0054293556e-1	6,1153459243e-02	-5,2200096436e-1	1,2916808565e+00
4	5,0010443628e-1	1,1617109794e-02	-5,2329514576e-1	1,9876176740e-01
5	5,0000551039e-1	6,0561685407e-04	-5,2358293631e-1	9,8214978438e-03
6	5,0000001666e-1	1,8264191607e-06	-5,2359872782e-1	2,9530304459e-05
7	5,0000000000e-1	-1,6847869395e-11	-5,2359877560e-1	2,7240041680e-10

Según se ve por la ejecución:

```
>> x=[1;1;1];
>> Newtrp_df_1(@NRP_1_dif,x)
9.1968721314e-01 4.6082245826e-01 -5.0338763389e-01 2.4087256721e+01
5.0100048524e-01 1.8743348339e-01 -5.2086923236e-01 5.8788009464e+00
5.0054293556e-01 6.1153459243e-02 -5.2200096436e-01 1.2916808565e+00
5.0010443628e-01 1.1617109794e-02 -5.2329514576e-01 1.9876176740e-01
5.0000551039e-01 6.0561685407e-04 -5.2358293631e-01 9.8214978438e-03
5.0000001666e-01 1.8264191607e-06 -5.2359872782e-01 2.9530304459e-05
5.0000000000e-01 1.6847869395e-11 -5.2359877560e-01 2.7240041680e-10
```

- Podemos usar diferencias finitas centradas:

```
function [f J]=NRP_1_dif_1(x)
 global h
 f(1) = 3*x(1)-cos(x(2)*x(3))-0.5;
 f(2) = x(1)^2-81*(x(2)+0.1)^2+sin(x(3))+1.06;
 f(3) = exp((-x(1)*x(2)))+20*x(3)+(10*pi-3)/3;
 if nargout<2, return, end
 for i=1:3
    x(i)=x(i)+h;   f1=NRP_1_dif_1(x);
    x(i)=x(i)-2*h; f2=NRP_1_dif_1(x);
    J(1:3,i)=(f1-f2)/(2*h);
    x(i)=x(i)+h;
 end
end
```

Resultando:

```
>>  Newtrp_df_1_c(@NRP_1_dif_1,[1;1;1])
  9.1968721308e-001 4.6082245570e-001 -5.0338763551e-001 2.4087256490e+001
  5.0100048532e-001 1.8743347768e-001 -5.2086923301e-001 5.8788006807e+000
  5.0054293549e-001 6.1153453680e-002 -5.2200096420e-001 1.2916807112e+000
  5.0010443627e-001 1.1617105749e-002 -5.2329514612e-001 1.9876169458e-001
  5.0000551037e-001 6.0561572299e-004 -5.2358293632e-001 9.8214794401e-003
  5.0000001666e-001 1.8263674477e-006 -5.2359872783e-001 2.9529468429e-005
  5.0000000000e-001 1.6710502161e-011 -5.2359877560e-001 2.7018009656e-010
```

Newton modificado

- Resulta de considerar la misma matriz Jacobiana, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)$, durante todo el proceso, o en un número fijo de iteraciones.

Jacobi

- La matriz Jacobiana se aproxima mediante los coeficientes de su diagonal principal. La relación de recurrencia es:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{D}_k^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k),$$

  donde $d_{ii}^k = J_{ii}^k$.

- Si la matriz $\boldsymbol{J}$ es diagonal dominante, esta estrategia puede ser suficiente.

Gauss-Seidel

- La matriz del sistema es la parte triangular inferior de la Jacobiana. La relación de recurrencia es:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{L}_k^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

donde $L_{ij}^k = J_{ij}^k$, $i \geq j$.

Relajación SOR

- El esquema iterativo en forma matricial que se utiliza es

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - (\rho \boldsymbol{D}_k + \boldsymbol{L}_k)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

El parámetro de relajación es $\omega = 1/(\rho + 1)$.

Métodos cuasi Newton

Charles George Broyden, Reino Unido, 1933-2011.

- Extienden la idea del método de la secante a n dimensiones. La primera idea se publicó en 1965 por Broyden.

- Su centran en escoger $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)$ de tal forma que se minimice el valor de la función que se obtendría en un mismo punto mediante sus dos aproximaciones $\boldsymbol{A}_k$ y $\boldsymbol{A}_{k-1}$ y que además se cumpla que $\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1})$.

- Si $\boldsymbol{s}_{k-1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}$ y $\boldsymbol{y}_{k-1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1})$, lo cumple la aproximación de $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)$ que sigue esta recurrencia:

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_{k-1} + \frac{(\boldsymbol{y}_{k-1} - \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{s}_{k-1})\boldsymbol{s}_{k-1}^T}{\boldsymbol{s}_{k-1}^T\boldsymbol{s}_{k-1}}$$

- El algoritmo con esta fórmula es el que sigue.

I – Definir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$; hacer $k = 1$ y $x_k \leftarrow x_0$.
II – Determinar la solución de $A_k s_k = -f(x_k)$.
III – Si $\|f(x_k)\|_2 < Tol$, PARAR: el problema está resuelto.
Si $> Tol$, hacer

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\leftarrow x_k + s_k \\ y_k &\leftarrow f(x_{k+1}) - f(x_k) \\ A_{k+1} &\leftarrow A_k + \frac{(y_k - A_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k} \\ k &\leftarrow k+1 \end{aligned}$$

y volver al paso II.

- La A_0 se puede obtener por una aproximación parcial o total: por diferencias finitas, por ejemplo.

- La convergencia del método a que da lugar es **superlineal.**

- **Ejemplo** Desde $[1,\ 1,\ 1]^T$, resolvamos este sistema con Newton y fórmula de Broyden.

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \tfrac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81\left(x_2+\tfrac{1}{10}\right)^2 + \operatorname{sen}(x_3) + 1{,}06 &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \tfrac{10\pi-3}{3} &= 0. \end{aligned}$$

- En **Matlab**:

```
function Broyden_3(fx,x)
% Método cuasi Newton con la fórmula de Broyden
   tol=sqrt(eps); n=length(x); dnor=1.0; J=zeros(n,n); f=fx(x);
   J(1,1)=3; J(2,2)=-178.2; J(3,3)=20;     % Trampa

   while dnor >tol
     p=J\f';
     x1=x-p;
     f=fx(x1);
     dnor=norm(f);
     fprintf('  %15.10e %15.10e %15.10e %15.10e\n',x,dnor);
     J=broy(J,f,p);
     x=x1;
   end
end

function J=broy(J,f,p)
   prod=p'*p;
   J=J-(1/prod)*f'*p';  % igual que J=J-(1/prod)*(y'+J*p)*p' ver Quarteroni p.289
end
```

- Como matriz A_0 se utiliza la diagonal de la Jacobiana en el punto de partida.

- El proceso de convergencia que desencadena la instrucción

```
>> Broyden_3(@NRP_1,[1 1 1]')
```

es el de la tabla.

k	x_1	x_2	x_3	$\|f(x_k)\|_2$
1	3,467674352893799E-1	4,662821024806326E-01	-4,919927476568708E-1	25,275175252053120
2	4,921232306763561E-1	3,236527849976335E-01	-5,162769886149683E-1	13,729480399369230
3	4,993486752210201E-1	2,131483731754155E-01	-5,166714279059975E-1	7,127754268893964
4	5,011649166344201E-1	9,690341763001632E-02	-5,210585843043458E-1	2,327087146316625
5	5,003080441638231E-1	4,279330810076126E-02	-5,224749127576461E-1	8,403043972608411E-01
6	5,001066711564305E-1	1,172102964534057E-02	-5,232913081815899E-1	2,006362866054586E-01
7	5,000183047478762E-1	2,032314047074978E-03	-5,235457794542374E-1	3,319399780484372E-02
8	5,000009846717887E-1	1,115674463108231E-04	-5,235958520108367E-1	1,804970096278442E-03
9	5,000000108711760E-1	1,033227841870006E-06	-5,235987485509558E-1	1,678549255880026E-05
10	5,000000000415024E-1	6,118437770431628E-10	-5,235987755897009E-1	9,122344458875651E-08
11	4,999999999986228E-1	-5,059011531347285E-09	-5,235987757245316E-1	4,849895176081806E-10

Se aprecia aquí

```
>> Broyden_3(@NRP_1,[1 1 1]')
  1.0000000000e+00 1.0000000000e+00 1.0000000000e+00 2.5275175224e+01
  3.4676743529e-01 4.6628210429e-01 -4.9199274766e-01 1.3729480376e+01
  4.9212323059e-01 3.2365278698e-01 -5.1627698859e-01 7.1277542490e+00
  4.9934867516e-01 2.1314837540e-01 -5.1667142786e-01 2.3270871287e+00
  5.0116491660e-01 9.6903420362e-02 -5.2105858424e-01 8.4030438329e-01
  5.0030804414e-01 4.2793311463e-02 -5.2247491268e-01 2.0063627763e-01
  5.0010667115e-01 1.1721033805e-02 -5.2329130808e-01 3.3193994651e-02
  5.0001830475e-01 2.0323188142e-03 -5.2354577934e-01 1.8049697418e-03
  5.0000098467e-01 1.1157244942e-04 -5.2359585189e-01 1.6785486153e-05
  5.0000001087e-01 1.0382563731e-06 -5.2359874843e-01 9.1223423183e-08
  5.0000000004e-01 5.6408065297e-09 -5.2359877546e-01 4.8499505118e-10
```

Implementación práctica del método de Broyden

Lema Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury 1949-1950
(a) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz regular $n \times n$ y $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ es regular si y sólo si $w = 1 + \boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u} \neq 0$.
(b) En este caso, además, $\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T\right)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \left(\frac{1}{w}\right) \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{A}^{-1}$.

- La idea es partir de una $\boldsymbol{A}_0^{-1}$ y adaptar $\boldsymbol{A}^{-1}$ con la nueva fórmula de Broyden:

$$\boldsymbol{A}_{k+1}^{-1} = \boldsymbol{A}_k^{-1} + \frac{\left(\boldsymbol{s}_k - \boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{y}_k\right)\boldsymbol{s}_k^T \boldsymbol{A}_k^{-1}}{\boldsymbol{s}_k^T \boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{y}_k}$$